العناصر المرتبة

لتكن المجموعة المرتبة $(E, \leq)$ نتعرف عليها أربعة عناصر تلعب دوراً هاماً في المجموعات المرتبة

أ) العنصر الأعظمي :

نسمي M عنصراً أعظمياً في E اذا كان من أجل أي $x \in E$ فإن :

$$M \nleq x$$

(هنا يعني إما $x \leq M$ أو أن M و x غير مقارنين)

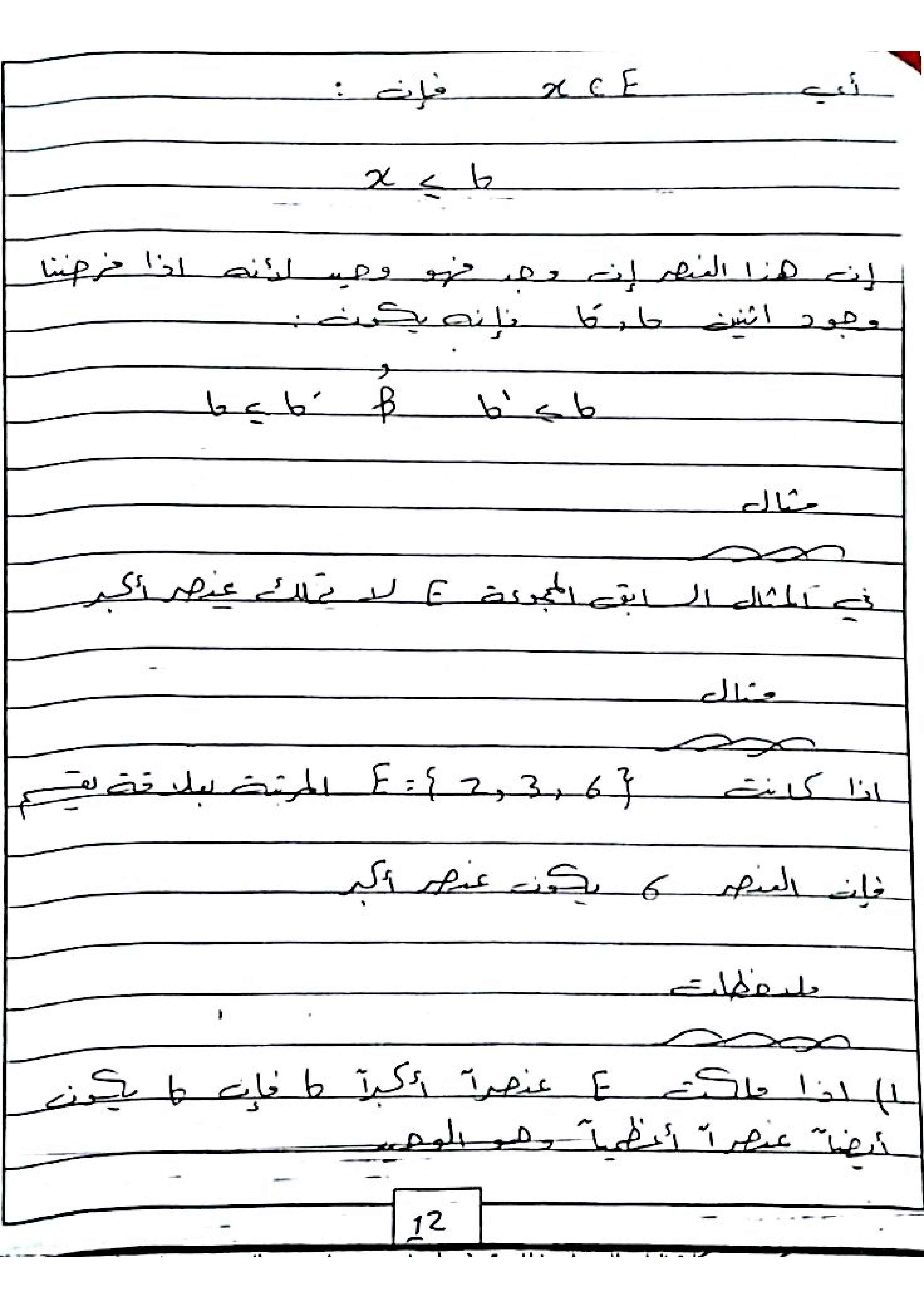
مثال

لتكن $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مرتبة بعلاقة يقسم

فإن العنصران $9, 4$ عنصران أعظميان

ب) العنصر الأكبر :

نسمي M العنصر الأكبر في E اذا كان من أجل



أي $x \in E$ فإن :

$$x \le b$$

إن هذا العنصر إن وجد فهو وحيد لأنه اذا فرضنا وجود اثنين b , b' فإنه يكون :

$$b \le b' \quad و \quad b' \le b$$

مثال

في المثال السابق المجموعة E لا تملك عنصر أكبر

مثال

اذا كانت $E = \{2, 3, 6\}$ المرتبة بعلاقة يقسم

فإن العنصر 6 يكون عنصر أكبر

ملاحظات

1) اذا ملكت E عنصراً أكبراً b فإن b يكون أيضاً عنصراً أعظمياً وهو الوحيد

2) اذا كانت E ــــ له فإن العنصر الأعظمي M
والعنصر الأكبر b يتطابقان دوماً

c) الحد الأعلى :

نسمي العنصر m من E حداً أعلى للمجموعة A
من E اذا كان من أجل أي $x \in A$ فإن :

$$x \leq m$$

مثال

لتكن $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مجموعة جزئية من
المجموعة المرتبة $(\mathbb{N}^*, |)$:
فإن كل من 36 ، 72 هو حد أعلى
للمجموعة A.

ملاحظات

1) اذا كان الحد الأعلى m للمجموعة A ينتمي إلى A
عندئذ يكون هو نفسه العنصر الأكبر للمجموعة A ،
من أجل الترتيب المحمل (أثر الترتيب على A)

2) نقول عن المجموعة الجزئية A التي تملك على الأقل حد أعلى في E بأنها محدودة من الأعلى في E

3) اذا كانت $m \in E$ ليس حد أعلى للمجموعة A فهذا يعني بأنه يوجد $x \in A$ بحيث يكون.

$x \nleq m$

ومنه نستنتج أن المجموعة الخالية من E تقبل أي عنصر من E حد أعلى لها

d) الحد الأعلى الأصغري:

نسمي العنصر S من E بالحد الأعلى الأصغري للمجموعة A من E اذا تحقق ما يلي:

- من أجل أي $x \in A$ فإن $x \leq S$

- من أجل أي حد أعلى آخر مثل m للمجموعة A فإن:

$S \leq m$

ونلاحظ أن مثل هذا العنصر إن وجد فهو وحيد

ونرمز للعنصر S بالرمز:

$$S = \sup_E A$$

أمثلة مراجعة

1) اذا كانت $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مجموعة جزئية من $(\mathbb{N}, |)$ فإن العدد 36 هو الحد الأعلى الأصغر للمجموعة A

2) مجموعة الأعداد الزوجية من المجموعة $(\mathbb{N}, \leq)$ لا تملك حد أعلى وبالتالي فهي لا تملك حد أعلى أصغر

3) اذا كانت $A = \mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}]$ مجموعة جزئية من المجموعة المرتبة $(\mathbb{Q}, \leq)$ فإن A تملك حد أعلى مثل (2) ولكنها لا تملك حد أعلى أصغر

ملاحظات

1) إن عنصر العنصر $S = \sup_E A$ وإذا كان $S \in A$ فإن S يكون العنصر الأكبر في A من أجل الترتيب المولد.

وبالعكس اذا كانت A تملك عنصر أكبر من أجل
الترتيب المولد فعندئذ يكون أيضاً هو الحد الأعلى
الأصغري لها

2) مجموعة الحدود العليا للمجموعة ϕ في E هي E
فلذلك أن القول بأن العنصر $\sup_E \phi$ موجود

يكافئ بأن E تملك عنصراً أصغرياً.

ملاحظة

وبشكل مشابه لما سبق يمكن أيضاً أن نعرف
عناصر مميزة أخرى:

العنصر الأصغري:

هو العنصر M' من E الذي يحقق من أجل أي
عنصر من E مثل x فإن:

$$x \nless M'$$

العنصر الأعظمي:

هو العنصر α' من E الذي يحقق من أجل أي

عنصر x من E فإن :

$$m' \le x$$

* اذا كانت $A \subseteq E$ فإن الحد الادنى للمجموعة A في E هو العنصر $m' \in E$ بحيث انه من اجل كل $x \in A$ فإن :

$$m' \le x$$

* الحد الادنى الاعظمي لمجموعة A من E هو العنصر $I \in E$ الذي يحقق الشرطين :

1) I هو حد ادنى
2) من أجل كل حد ادنى آخر I' لـ A فإن
$$I' \le I$$

ونرمز للحد الادنى الاعظمي للمجموعة A في E بالرمز :

$$I = \inf_E A$$

مبرهنة

إذا كانت $B \subseteq A \subseteq E$ فإن:

* $\sup_E B \leq \sup_E A$
* $\inf_E A \leq \inf_E B$

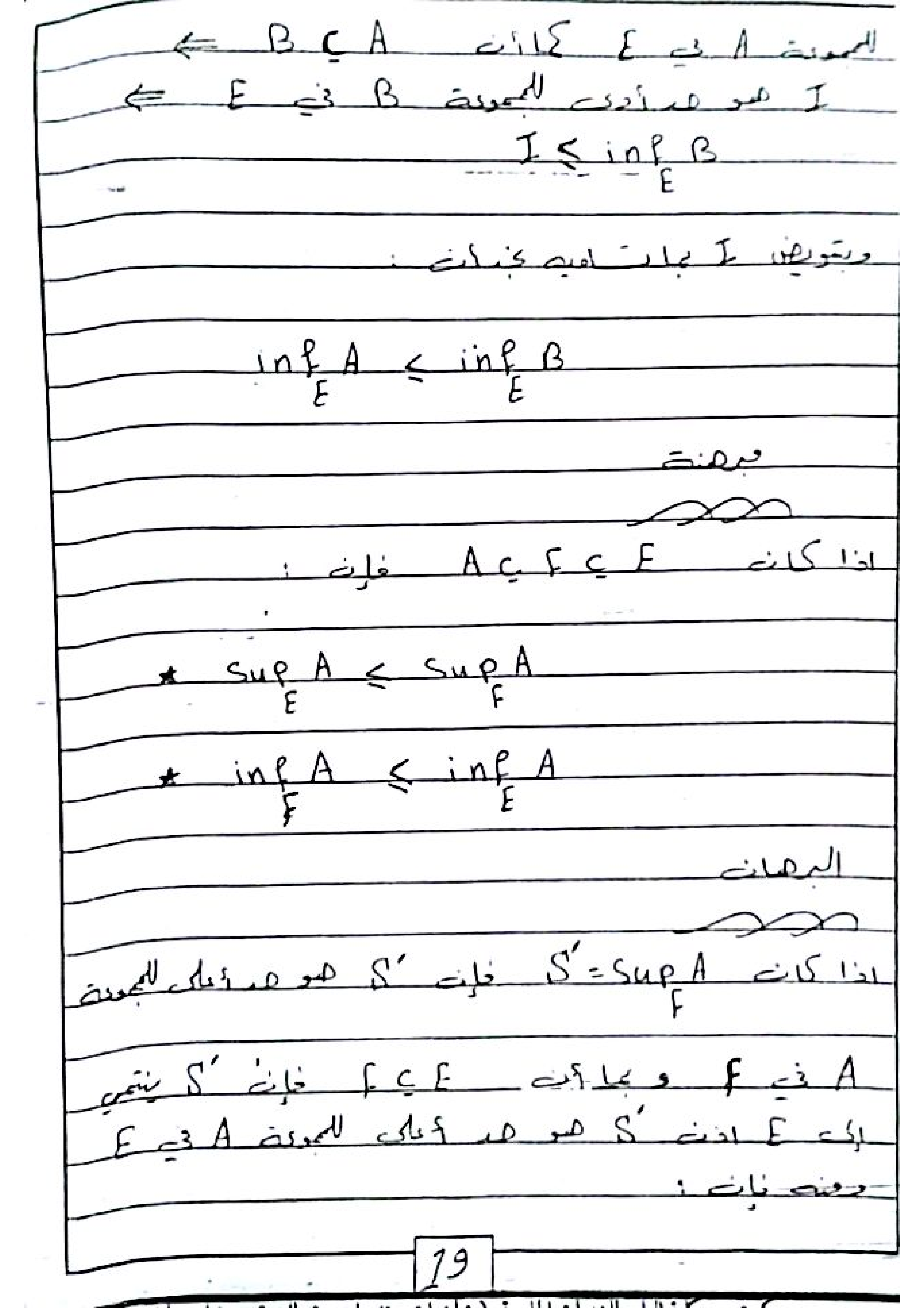
(في حالة وجود هذه الحدود الدنيا والعليا)

البرهان

• بفرض أن $S = \sup_E A \Leftarrow S$ هو حد
أعلى للمجموعة A في E، لأن $B \subseteq A \Leftarrow$
S هو حد أعلى للمجموعة $B \Leftarrow$
$\sup_E B \leq S$
وبتعويض S عن قيمته نجد أن:

$$\sup_E B \leq \sup_E A$$

• بفرض أن $I = \inf_E A \Leftarrow I$ هو حد أدنى



المجموعة A في E كانت $A \subseteq B$ ⇐

I هو حد أدنى للمجموعة B في E ⇐

$$I \le \inf_E B$$

وبتعويض I بما تساويه نجد أن:

$$\inf_E A \le \inf_E B$$

مبرهنة

اذا كان $A \subseteq F \subseteq E$ فإن:

* $\sup_E A \le \sup_F A$
* $\inf_F A \le \inf_E A$

البرهان

اذا كان $S' = \sup_F A$ فإن S' هو حد أعلى للمجموعة A في F وبما أن $F \subseteq E$ فإن S' ينتمي إلى E اذن S' هو حد أعلى للمجموعة A في E

ومنه فإن:

$$\sup_E A \leq S'$$

وبتعويض S' بما تساويه نجد أن :

$$\sup_E A \leq \sup_F A$$

وبشكل مشابه :

اذا كان $I' = \inf_F A \Leftarrow I'$ هو حد أدنى

للمجموعة A في F وبما أن $F \subseteq E \Rightarrow I'$ ينتمي
إلى E وبالتالي فهو حد أدنى للمجموعة A في E
ومنه فإن :

$$I' \leq \inf_E A$$

وبتعويض I' بما تساويه نجد أن :

$$\inf_F A \leq \inf_E A$$

ملاحظة

حتى يكون $\sup_E A = \sup_F A$ يلزم ويكفي

أن يكون $\sup_E A \in F$

مثال

اذا أخذنا السلسلة العادية $(\mathbb{R}, \leq)$ واذا كانت
$B = [0,1[$ و $A = [0,1[\cup [2,3]$

فإن :

$$\sup_{\mathbb{R}} B = 1 \leq \sup_{\mathbb{R}} A = 3$$

$$\sup_{\mathbb{R}} B = 1 < \sup_{A} B = 2$$

مبرهنة

اذا كانت $f : E \to F$ ايزومورفيزم ترتيب
واذا كانت $A \subseteq E$ تملك حد أعلى أصغري في
E فإن $f(A)$ تملك عندئذ حد أعلى أصغري
في F وهو $f(s)$
أي أن :

$$f(\sup_{E} A) = \sup_{F} (f(A))$$

{ ويمكن صياغة هذه المبرهنة بشكل مشابه من أجل الحد الأدنى الأعظمي }

البرهان

* لتكن $x' \in f(A) \Leftarrow$ توجد $x \in A$

بحيث يكون :

$$x' = f(x)$$

كما أن $x \leq S$ (لأن S هو أكبر عنصر للمجموعة A في E)

$\Leftarrow$ $x' = f(x) \leq f(S)$

$\Leftarrow$ $f(S)$ هو أكبر عنصر للمجموعة $f(A)$ في F

• لتكن m' هو أكبر عنصر أصغر للمجموعة $f(A)$ في F $\Leftarrow$ توجد $m \in E$ (وهي وحيدة) بحيث يكون :

$$m' = f(m)$$

من أجل أي $x \in A$ فإن $f(x) \in f(A)$

يكون :

$$f(x) \leq f(m) = m'$$

$\Leftarrow$ $x \leq m$

لأن f^{-1} مورفيزم ترتيب

$\Leftarrow$ m هو حد أعلى للمجموعة A في E $\Leftarrow$

$S \leq m$ $\Leftarrow$ $f(S) \leq f(m) = m'$

ومنه فإن :

$f(S)$ هو حد أعلى أصغري للمجموعة A' في F

المجموعات شبه الاستقرائية

نقول عن المجموعة المرتبة E بأنها شبه استقرائية اذا كانت كل سلسلة غير خالية من E تملك حد أعلى في E

* ونقول عن مجموعة بأنها استقرائية اذا كانت كل سلسلة من E تملك حد أعلى أصغري في E

نظرية زورن Zorn (تقبل بدون برهان)

اذا كانت E مجموعة شبه استقرائية فإنه من أجل أي عنصر $a \in E$ يوجد على الأقل عنصر أعظمي M من E بحيث يكون :

$$M \geq a$$

انتهت المحاضرة